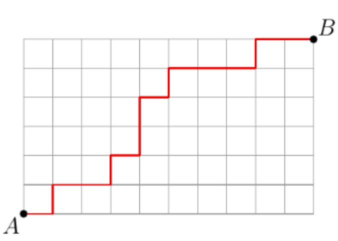
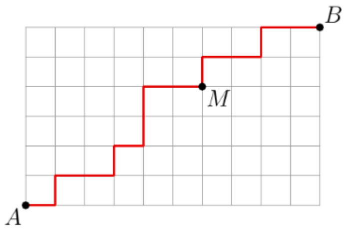
Домашнее задание к занятию 4.

Пожалуйста, присылайте решения задач из домашнего задания на почту info@oxbridge.ru (в копию ставьте, пожалуйста, masha.sham1@yandex.ru) до четверга 02.11.23 включительно. В теме письма укажите, пожалуйста, фамилию и имя, номер группы (М-3), название предмета.

1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. Сколькими способами можно из семи человек выбрать комиссию из трёх человек во главе с председателем?
3. Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?
4. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.
5. Сколько маршрутов ведут из точки A(0, 0) в точку B(10, 6)? Сколько таких маршрутов проходит через точку M(6, 4)?





6. ***Прочитайте справку о зарождении теории вероятностей.***

История возникновения теории вероятностей

В отличие от появившихся примерно в то же время других разделов математики (например, математического анализа или аналитической геометрии), у теории вероятностей по существу не было античных или средневековых предшественников. Долгое время теория вероятностей считалась чисто опытной наукой и «не совсем математикой», её строгое обоснование было разработано только в 1929 году, то есть даже позже, чем аксиоматика теории множеств (1922). В наши дни теория вероятностей занимает одно из первых мест в прикладных науках по широте своей области применения; «нет почти ни одной естественной науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные методы». В античные времена и в средневековье натурфилософы ограничивались метафизическими рассуждениями о происхождении случайности и ее роли в природе. Математики в этот период рассматривали и иногда решали задачи, связанные с теорией вероятностей, но никаких общих методов и тематических понятий ещё не появилось. Главным достижением данного периода можно считать развитие комбинаторных методов, которые позже пригодились создателям теории вероятностей. (Перестановки, размещения и сочетания.; Биномиальные коэффициенты (бином Ньютона, треугольник Паскаля)).

Первые задачи вероятностного характера возникли Средние века в различных азартных играх — костях, картах и др. Французский дворянин, некий господин де Мере, был азартным игроком в кости и страстно хотел разбогатеть. Он затратил много времени, чтобы открыть тайну игры в кости. Он выдумывал различные варианты игры, предполагая, что таким образом приобретет крупное состояние. Так, например, он предлагал бросать одну кость по очереди 4 раза и убеждал партнера, что по крайней мере один раз выпадет при этом шестерка. Если за 4 броска шестерка не выходила, то выигрывал противник.

В те времена еще не существовал раздел математики, который сегодня мы называем теорией вероятностей, а поэтому, чтобы убедиться, верны ли его предположения, господин Мере обратился к своему знакомому, известному математику и философу Б. Паскалю с просьбой, чтобы он изучил два знаменитых вопроса, первый из которых он попытался решить сам. Вопросы были такие :

Сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы случаев выпадения сразу двух шестерок было больше половины от общего числа бросаний?

Как справедливо разделить поставленные на кон двумя игроками деньги, если они по каким-то причинам прекратили игру преждевременно?

Паскаль не только сам заинтересовался этим, но и написал письмо известному математику П. Ферма, чем спровоцировал его заняться общими законами игры в кости и вероятностью выигрыша.

Таким образом, азарт и жажда разбогатеть дали толчок возникновению новой чрезвычайно существенной математической дисциплины: теории вероятностей. В разработке ее основ принимали участие математики такого масштаба, как Паскаль и Ферма, Гюйгенс (1629—1695), который написал тракта «О расчетах при азартных играх», Яков Бернулли (1654—1705), Муавр (1667—1754), Лаплас (1749— 1827), Гаусс (1777—1855) и Пуассон (1781—1840). В наше время теория вероятности используется почти во всех отраслях знаний: в статистике, синоптике (прогноз погоды), биологии, экономике, технологии, строительстве и т. д.

Средневековая Европа и начало Нового времени

Французский каноник XIII века Ришар де Фурниваль правильно подсчитал все возможные суммы очков после броска трёх костей и указал число способов, которыми может получиться каждая из этих сумм. Это число способов можно рассматривать как первую числовую меру ожидаемости события, аналогичную вероятности. До Фурниваля, а иногда и после него, эту меру часто подсчитывали неверно, считая, например, что суммы 3 и 4 очка равновероятны, так как оба могут получиться «только одним способом»: по результатам броска «три единицы» и «двойка с двумя единицами» соответственно. При этом не учитывалось, что три единицы в самом деле получаются только одним способом: ~1+1+1, а двойка с двумя единицами — тремя: ~1+1+2;\;1+2+1;\;2+1+1, так что эти события не равновероятны. Аналогичные ошибки неоднократно встречались и в дальнейшей истории науки.

В обширной математической энциклопедии «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций» итальянца Луки Пачоли (1494) содержатся оригинальные задачи на тему: как разделить ставку между двумя игроками, если серия игр прервана досрочно. Пример подобной задачи: игра идёт до 60 очков, победитель получает всю ставку в 22 дуката, в ходе игры первый игрок набрал 50 очков, второй — 30, и тут игру пришлось прекратить; требуется справедливо разделить исходную ставку. Решение зависит от того, что понимать под «справедливым» разделом; сам Пачоли предложил делить пропорционально набранным очкам (55/4 и 33/4 дуката); позднее его решение было признано ошибочным.

Распределение суммы очков после бросания двух костей

Крупный алгебраист XVI века Джероламо Кардано посвятил анализу игры содержательную монографию «Книга об игре в кости» (1526 год, опубликована посмертно). Кардано провёл полный и безошибочный комбинаторный анализ для значений суммы очков и указал для разных событий ожидаемое значение доли «благоприятных» событий: например, при бросании трёх костей доля случаев, когда значения всех 3 костей совпадают, равна 6/216 или 1/36. Кардано сделал проницательное замечание: реальное количество исследуемых событий может при небольшом числе игр сильно отличаться от теоретического, но чем больше игр в серии, тем доля этого различия меньше. По существу, Кардано близко подошёл к понятию вероятности:

Итак, имеется одно общее правило для расчёта: необходимо учесть общее число возможных выпадений и число способов, которыми могут появиться данные выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений.

Другой итальянский алгебраист, Никколо Тарталья, раскритиковал подход Пачоли к решению задачи о разделе ставки: ведь если один из игроков ещё не успел набрать ни одного очка, то алгоритм Пачоли отдаёт всю ставку его сопернику, но это трудно назвать справедливым, поскольку некоторые шансы на выигрыш у отстающего всё же имеются. Кардано и Тарталья предложили свои (различные) способы раздела, но впоследствии и эти способы были признаны неудачными.

Исследованием данной темы занимался и Галилео Галилей, написавший трактат «О выходе очков при игре в кости» (1718 год, опубликован посмертно). Изложение теории игры у Галилея отличается исчерпывающей полнотой и ясностью. В своей главной книге «Диалог о двух главнейших системах мира, птоломеевой и коперниковой» Галилей также указал на возможность оценки погрешности астрономических и иных измерений, причём заявил, что малые ошибки измерения вероятнее, чем большие, отклонения в обе стороны равновероятны, а средний результат должен быть близок к истинному значению измеряемой величины. Эти качественные рассуждения стали первым в истории предсказанием нормального распределения ошибок.